実力をつけるために…

どうしたら自転車が上手に乗れるようになるのだろうか？
補助輪を付けて練習した人もいたでしょう．何度も転んで怪我をして，それでも諦めずに乗り続けることで，上手く乗れるようになりました．自転車に３回しか乗ったことがない人と 300 回乗ったことがある人ではどちらが上手に乗れるでしょうか．その答は明白です．自転車を上手に乗れるようになる為に，競輪選手のビデオを徹底研究する人がいたとしたら，あなたはどうアドバイスしますか？
そんなものをいくら見て研究しても，実際に自転車に乗ってみないと上手にはならないとアドバイスするでしょう．

受験勉強というのは，数学に限らず，自転車を上手に乗ることに似ています．一流の学者の論文を読んだりしてもいけないわけで，実際に自分のまわりにある問題と実際に格闘してもがいて苦しんではじめて問題が上手に解けるようになるのですね．
ただ，受験勉強の場合は，自転車における補助輪に相当する，参考書や予備校，そして「スタディサプリ」など，これから実力をつけようと考えている受験生にとっての踏み台になるものが沢山あります．
それらを上手に利用して，最後は自分の力で時間の許す限り多くの問題を経験して，制限時間内でちゃんとした解答を書けるようになるまで徹底的に練習することによって，合格がより確実なものになるわけです．

以上のことを意識しながら授業を受けて，自分の及ばない所を少しでもなおしていけば，必ず数学はできるようになるはずです．

最後まで諦めずに頑張りましょう !!

堺　義明

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

高３　トップレベル数学Ⅲ

目　　次

第 1 講　1 の n 乗根 ―― p.4
第 2 講　点を回転する ―― p.8
第 3 講　複素数と円 ―― p.12
第 4 講　複素数と領域 ―― p.16
第 5 講　媒介変数で表された曲線 ―― p.20
第 6 講　２次曲線と極座標 ―― p.24
第 7 講　よくある極限 ―― p.28
第 8 講　挟んで極限 ―― p.32
第 9 講　ちょっと難あり極限 ―― p.36
第 10 講　一般項を求めないで極限 ―― p.40
第 11 講　無限級数 ―― p.44
第 12 講　微分について ―― p.48
第 13 講　接線といえば ―― p.52
第 14 講　グラフを描く ―― p.56
第 15 講　ちょっと訳あり増減 ―― p.60
第 16 講　微分でやっておきたいこと ―― p.64
第 17 講　落とせない積分計算 ―― p.68
第 18 講　積分と漸化式 ―― p.72
第 19 講　実数解条件と体積 ―― p.76
第 20 講　斜回転体の体積 ―― p.80
第 21 講　体積は切る！ ―― p.84
第 22 講　微分方程式 ―― p.88
第 23 講　積分でやっておきたいこと（その１） ―― p.92
第 24 講　積分でやっておきたいこと（その２） ―― p.96

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　1のn乗根

1

［A］ 複素数zを

$$z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$の値を求めよ．

(2) 複素数平面において，1，z，z^2，z^3，z^4，z^5，z^6が表す点を，それぞれ，P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6とする．$\triangle P_1P_2P_4$の重心を$Q(\alpha)$，$\triangle P_3P_5P_6$の重心を$R(\beta)$とおくとき，複素数α，βを求めよ．

(3) $\triangle P_0QR$の面積を求めよ．

［B］ Nを自然数とし，複素数$z=\cos\theta+i\sin\theta$は$z^N=1$を満たすとして，以下の級数和S_1，S_2，S_3の値を求めよ．

ただし，ここでiは虚数単位$(i^2=-1)$である．

(1) $S_1=1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}$

(2) $S_2=1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos(N-1)\theta$

(3) $S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots+\cos^2(N-1)\theta$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第1講　1の n 乗根

1　1の5乗根を z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 とする．ただし，

$$0 \leqq \arg z_0 < \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < \arg z_4 < 2\pi$$

次の各問いに答えよ．

(1)　z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 の偏角は，$\boxed{}\times k$，$k=0$，1，2，3，4 と表せる．

(2)　$f(z)=(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$ とする．$f(2)$ の値は $\boxed{}$

(3)　$g(z)=(z-z_k)(z-{z_k}^2)(z-{z_k}^3)(z-{z_k}^4)$ とする．$z_k \neq z_0$ のとき，$g(2)$ の値は
$\boxed{}$

(4)　$z_k \neq z_0$ のとき，$\dfrac{1}{2-z_k}+\dfrac{1}{2-{z_k}^2}+\dfrac{1}{2-{z_k}^3}+\dfrac{1}{2-{z_k}^4}$ の値は $\boxed{}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　1のn乗根

1

［A］　複素数zを

$$z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1)　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$の値を求めよ．

(2)　複素数平面において，1，z，z^2，z^3，z^4，z^5，z^6が表す点を，それぞれ，$\mathrm{P_0}$，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$，$\mathrm{P_4}$，$\mathrm{P_5}$，$\mathrm{P_6}$とする．$\triangle\mathrm{P_1P_2P_4}$の重心を$\mathrm{Q}(\alpha)$，$\triangle\mathrm{P_3P_5P_6}$の重心を$\mathrm{R}(\beta)$とおくとき，複素数$\alpha$，$\beta$を求めよ．

(3)　$\triangle\mathrm{P_0QR}$の面積を求めよ．

［B］　Nを自然数とし，複素数$z=\cos\theta+i\sin\theta$は$z^N=1$を満たすとして，以下の級数和S_1，S_2，S_3の値を求めよ．

ただし，ここでiは虚数単位$(i^2=-1)$である．

(1)　$S_1=1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}$

(2)　$S_2=1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos(N-1)\theta$

(3)　$S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots+\cos^2(N-1)\theta$

【答】　［A］　(1)　-1　(2)　$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{7}\,i}{6}$，$\beta=\dfrac{-1-\sqrt{7}\,i}{6}$　(3)　$\dfrac{7\sqrt{7}}{36}$

［B］　(1)　$S_1=\begin{cases}N & (z=1)\\ 0 & (z\neq 1)\end{cases}$　(2)　$S_2=\begin{cases}N & (z=1)\\ 0 & (z\neq 1)\end{cases}$　(3)　$S_3=\begin{cases}N & (z=\pm 1)\\ \dfrac{N}{2} & (z\neq \pm 1)\end{cases}$

【解説】

［A］　(1)　$z^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$である．

$$\begin{aligned}&z^7-1=0\\ \iff\ &(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0\\ \iff\ &z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0\quad(z\neq 1\text{ より})\\ \therefore\ &z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\mathbf{-1}\end{aligned}$$

(2)　$\alpha=\dfrac{z+z^2+z^4}{3}$，$\beta=\dfrac{z^3+z^5+z^6}{3}$であるから，(1)と$z^7=1$に注意すると

$$\alpha+\beta=\frac{z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z}{3}=-\frac{1}{3}$$

$$\alpha\beta=\frac{3z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z}{9}=\frac{2}{9}$$

よって　α，βは$t^2+\dfrac{1}{3}t+\dfrac{2}{9}=0$の2解であり$\alpha$の虚部は正より

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{-1+\sqrt{7}\,i}{6},\quad \beta=\frac{-1-\sqrt{7}\,i}{6}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　△P_0QR は底辺の長さが

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

高さが

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right|=\frac{7}{6}$$

とみることができるので，求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{7}{6}=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{7}}{36}}$$

［B］(1)　$z=1$ のとき

$$S_1=1+1+1+\cdots+1=N$$

$z\neq1$ のとき

$$S_1=\frac{z^N-1}{z-1}=0$$

ゆえに

$$\boldsymbol{S_1=\begin{cases}N & (z=1)\\ 0 & (z\neq1)\end{cases}}$$

(2)　(1)より

$$S_1=\{1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos(N-1)\theta\}+i\{\sin\theta+\sin2\theta+\cdots+\sin(N-1)\theta\}$$

よって S_2 は S_1 の実部を表しているので

$$\boldsymbol{S_2=\begin{cases}N & (z=1)\\ 0 & (z\neq1)\end{cases}}$$

(3)

$$\begin{aligned}S_3&=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots+\cos^2(N-1)\theta\\&=1+\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)+\frac{1}{2}(1+\cos4\theta)+\cdots+\frac{1}{2}\{1+\cos2(N-1)\theta\}\\&=\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\{1+\cos2\theta+\cos4\theta+\cdots+\cos2(N-1)\theta\}\end{aligned}$$

となるが，第２項の中括弧の中身は $z^{2N}=1$ を満たすときの

$$1+z^2+z^4+\cdots+z^{2(N-1)}$$

の実部となるので

$$1+\cos2\theta+\cos4\theta+\cdots+\cos2(N-1)\theta$$
$$=\begin{cases}N & (z=\pm1)\\ 0 & (z\neq\pm1)\end{cases}$$

となる．よって

$$\boldsymbol{S_3=\begin{cases}N & (z=\pm1)\\ \dfrac{N}{2} & (z\neq\pm1)\end{cases}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

練習問題解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第1講　1の n 乗根

1　1の5乗根を z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 とする．ただし，

$$0 \leqq \arg z_0 < \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < \arg z_4 < 2\pi$$

次の各問いに答えよ．

(1)　z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 の偏角は，$\boxed{}\times k$，$k=0$, 1, 2, 3, 4 と表せる．

(2)　$f(z)=(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$ とする．$f(2)$ の値は $\boxed{}$

(3)　$g(z)=(z-z_k)(z-z_k{}^2)(z-z_k{}^3)(z-z_k{}^4)$ とする．$z_k \neq z_0$ のとき，$g(2)$ の値は $\boxed{}$

(4)　$z_k \neq z_0$ のとき，$\dfrac{1}{2-z_k}+\dfrac{1}{2-z_k{}^2}+\dfrac{1}{2-z_k{}^3}+\dfrac{1}{2-z_k{}^4}$ の値は $\boxed{}$

【答】 (1) $\dfrac{2}{5}\pi$　(2) 31　(3) 31　(4) $\dfrac{49}{31}$

【解説】

(1)　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$$z^5=1 \iff r^5(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)=1$$

$$\iff \begin{cases} r^5=1 \\ 5\theta=2\pi\times k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4) \end{cases}$$

$$\therefore \quad r=1,\ \theta=\boldsymbol{\frac{2}{5}\pi}\times k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

(2)　$z^5=1 \iff z^5-1=0$ の5つの解が z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 なので

$$z^5-1=(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$$

と因数分解できる．

$$\therefore \quad f(z)=z^5-1$$

よって

$$f(2)=2^5-1=\mathbf{31}$$

(3)　$z_k \neq z_0$ のとき

$$(z-z_k)(z-z_k{}^2)(z-z_k{}^3)(z-z_k{}^4)$$
$$=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$$

となり，また

$$z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$$

より

$$g(z)=z^4+z^3+z^2+z+1$$
$$\therefore \quad g(2)=\mathbf{31}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4)　(3)と同様に

$$\frac{1}{2-z_k}+\frac{1}{2-{z_k}^2}+\frac{1}{2-{z_k}^3}+\frac{1}{2-{z_k}^4}$$

$$=\frac{1}{2-z_1}+\frac{1}{2-z_2}+\frac{1}{2-z_3}+\frac{1}{2-z_4}$$

$$=\frac{4-(z_1+z_4)}{(2-z_1)(2-z_4)}+\frac{4-(z_2+z_3)}{(2-z_2)(2-z_3)}$$

$$=\frac{4-(z_1+z_4)}{5-2(z_1+z_4)}+\frac{4-(z_2+z_3)}{5-2(z_2+z_3)}$$

$$=1+\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{5-2(z_1+z_4)}+\frac{1}{5-2(z_2+z_3)}\right\}$$

$$=1+\frac{3}{2}\cdot\frac{10-2(z_1+z_2+z_3+z_4)}{\{5-2(z_1+z_4)\}\{5-2(z_2+z_3)\}}$$

$$=1+\frac{3}{2}\cdot\frac{10-2(-1)}{g(2)}$$

$$=1+\frac{18}{31}$$

$$=\mathbf{\frac{49}{31}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。